Hoja de Ejercicios 1

February 7, 2018

Ejercicios del curso

Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ una secuencia de variables aleatorias reales.

1. Mostrar que la convergencia en distribución de $(X_n)_{n\geq 1}$ NO es equivalente a lo siguiente:

   Para cada función f continua con soporte compacto, $(\mathbb{E}(f(X_n)))_{n\geq 1}$ converge.

   Mostrar que la convergencia en distribución de $(X_n)_{n\geq 1}$ a X_0 es equivalente a lo siguiente:

   Para cada función f continua con soporte compacto, $\mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}(f(X_0))$.

2. Supongamos que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} X_0$.

   (a) Mostrar que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mathbb{E}(\|X_n\|\mathbf{1}_{X_n\in F}) < \epsilon$ para cada $n \geq 0$ y cada $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $\mathbb{P}(F) \leq \delta$.

   (b) Deducir que si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} X_0$, entonces $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X_0$ y $(X_n)_{n\geq 0}$ es uniformemente integrable.

Ejercicios

Ejercicio 1

Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una secuencia de variables aleatorias.

1. Supongamos que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en distribución a una variable gaussiana estándar N. Converge la secuencia $\mathbb{E}(|X_n|^p)$ a $\mathbb{E}(|N|^p)$ para cada $p \geq 1$?

2. Mostrar la recíproca: si la secuencia $\mathbb{E}(|X_n|^p)$ converge a $\mathbb{E}(|N|^p)$ para cada $p \geq 1$, entonces $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en distribución a la variable gaussiana estándar N.

Ejercicio 2

Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una secuencia de variables aleatorias reales con soporte en $\mathbb{Z}$.

1. Supongamos que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en distribución a X. Que es el soporte de X ? Mostrar que para cada $x \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(X_n = x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X = x).$$

2. Supongamos que X es una variable aleatoria real y que para cada $x \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(X_n = x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X = x).$$

   Que debe verificar X para que X_n converja en distribución a X ?

Ejercicio 3

Sea X una variable aleatoria real tal que $\mathbb{E}(X) = 0$ y $\varphi(t) := \mathbb{E}(e^{tX})$ es finito para cada $t \in \mathbb{R}$. Definimos $\Lambda(c) = \inf_{t\in\mathbb{R}}(\varphi(t)e^{-tc})$.

1. Mostrar que $\mathbb{P}(X \geq c) \leq \Lambda(c)$ para cada $c \geq 0$. Que pasa si $c \leq 0$?
2. Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una secuencia de variables aleatorias independientes de misma distribución que X. Mostrar que $\mathbb{P}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \geq c) \leq \Lambda(c)^n$ para cada $n \geq 1$ y $c \geq 0$.

Ejercicio 4

Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una secuencia de variables aleatorias tales que la distribución de X_n es una distribución binomial de parámetros $(n, 1/n)$. Sea $(Y_n)_{n\geq 1}$ una secuencia de variables aleatorias tales que $(Y_n|X_n = x) = x$ para $x \leq \sqrt{n}$ y $(Y_n|X_n = x)$ es una distribucion binomial de parámetros $(x!, \frac{1}{\pi})$ para $x \geq \sqrt{n}$. Mostrar que $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge en distribución y describir la distribución limite.

Ejercicio 5

Sea X una variable aleatoria con soporte en $\mathbb{Z}$ y con distribución

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{C}{2n^2 \log n},$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$.

1. Mostrar que X no tiene un momento de orden uno.
2. Calcular la función característica ϕ_x de X.
3. Mostrar que ϕ_X es derivable sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 6

Sea Z una variable aleatoria con distribución uniforme sobre $[-1, 1]$.

1. Calcular la función característica de Z.
2. Mostrar que no existen variables aleatorias independientes X, Y tales que $X - Y \sim Z$.